RELASI EKUIVALENSI PADA SUBGRUP *FUZZY*

R. Sulaiman

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Surabaya
Jln. Ketintang, Surabaya
rsulaiman2010@gmail.com

ABSTRACT

Without any equivalence relation on set of fuzzy subgroups, the number of fuzzy subgroup is infinite, even for the trivial group $G = \{e\}$. First, definitions of fuzzy subset and fuzzy subgroup is given, then some theorems associated with them is derived. Secondly, definitions of equivalence relation are explained, those are definition of Dixit and definition of Murali. Comparison between these definitions is analyzed. These results are important to construct group of classes of equivalencies and count the number of its elements.

Keywords: *subset fuzzy, subgroup fuzzy, equivalence*

ABSTRAK

Tanpa adanya relasi ekuivalensi pada himpunan subgrup fuzzy, maka banyaknya subgrup fuzzy dari setiap grup adalah takhingga walaupun dari grup trivial $G = \{e\}$. Pertama kali dijelaskan definisi subhimpunan fuzzy dan subgrup fuzzy, kemudian diturunkan beberapa teorema yang terkait dengannya. Selanjutnya dibahas tentang definisi relasi ekuivalensi yang ada, yaitu definisi Dixit dan definisi dari Murali. Perbandingan antara kedua definisi itu juga dianalisis. Hasil ini penting untuk mengkonstruksi grup dari klas-klas ekuivalensi dan menghitung banyak anggotanya.

Kata kunci: *subhimpunan fuzzy, subgrup fuzzy, ekuivalen*

PENDAHULUAN

Setelah Rosenfeld menulis artikel pertama kali tentang grup fuzzy pada tahun 1971, banyak peneliti mengembangkan teori itu. Salah satu konsep yang dikembangkan adalah konsep subgrup fuzzy. Salah satu hal yang menarik untuk dikaji adalah mengkonstruksi relasi ekuivalensi pada subgrup fuzzy. Hal itu penting dan menarik karena tanpa adanya relasi ekuivalensi, maka banyak subgrup fuzzy dari suatu grup adalah tak hingga walaupun untuk grup trivial $G = \{e\}$. Dengan adanya relasi ekuivalensi pada subgrup fuzzy, kita dapat mengkonstruksi subgrup fuzzy dan menghitung banyak subgrup fuzzy dari suatu grup, khususnya grup hingga. Banyak penelitian yang telah dilakukan terkait dengan hal itu, misalnya Laszlo (1992) telah mengkonstruksi subgrup fuzzy dari grup berorder 1 sampai 6, Zhang dan Zou (1998) telah menentukan banyak subgrup fuzzy dari grup siklik berorder p^n dengan p adalah bilangan prima, Murali dan Makamba (2001, 2004) telah menemukan banyak subgrup fuzzy dari grup abelian $p^n q^m$ dengan p dan q adalah bilangan prima berbeda, Tarnauceanu dan Bentea (2008) telah menemukan banyak subgrup fuzzy dari grup abelian hingga dan Sulaiman & Abd Ghafur (2010) telah mengkonstruksi subgrup fuzzy dari grup simetri S_2, S_3 dan A_4.

Beberapa peneliti telah mendefinisikan relasi ekuivalensi pada subgrup fuzzy, yaitu Dixit et al. (1996) dan Murali & Makamba (2001). Tujuan tulisan ini akan mengkaji dua definisi relasi ekuivalensi itu serta membandingkannya.

Tinjauan Pustaka

Berikut dijelaskan beberapa definisi dan teorema yang dibutuhkan dalam makalah ini. Pertama kali mengkaji definisi yang telah ada dari berbagai jurnal terkait, menganalisis dan serta membandingkan hasil yang diperoleh. Berikut ini akan diuraikan beberapa konsep yang diperlukan untuk bahasan selanjutnya.

Definisi 1: Misalkan G adalah grup. Fungsi μ dari G ke $[0,\ 1]$ disebut *subhimpunan fuzzy* dari G.

Definisi 2: Misalkan μ subhimpunan fuzzy dari G. Fungsi μ disebut *subgrup fuzzy* dari G jika memenuhi dua syarat berikut,

(1) $\mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}, \forall x, y \in G$,
(2) $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x), \forall x \in G$ (Zhang, 2001:243).

Contoh:
Perhatikan grup $G = \mathbb{Z}_{12}$. Definisikan fungsi μ, γ, α dan β seperti berikut:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{0,2,4,6,8,10\} \\ \frac{1}{2}, & x \in \{1,3,5,7,9,11\} \end{cases}, \quad \gamma(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{0,1,2,3,4,5\} \\ \frac{1}{2}, & x \in \{6,7,8,9,10,11\} \end{cases},$$

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{0,4,8\} \\ \frac{1}{2}, & x \in \{2,6,10\} \\ \frac{1}{3}, & x \in \{1,3,5,7,9,11\} \end{cases}, \quad \beta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in \{0,4,8\} \\ \frac{1}{4}, & x \in \{2,6,10\} \\ 0, & x \in \{1,3,5,7,9,11\} \end{cases}.$$

Tidak sulit untuk menunjukkan bahwa μ, α dan β merupakan subgrup fuzzy dari Z_{12}, sedangkan γ bukan subgrup fuzzy dari Z_{12}.

Definisi 3: Misalkan μ adalah subgrup fuzzy dari G dan $t \in [0,1]$. Himpunan $\mu_t = \{x \in G | \mu(x) \geq t\}$ disebut level subgrup ("*level subgroup*") dari μ. Keluarga semua level subgrup dari μ kita simbolkan dengan $\mathcal{F}(\mu_U)$.

Contoh:
Perhatikan subgrup fuzzy μ, α dan β seperti pada Contoh 1.

Maka

$$\mu_1 = \{0,2,4,6,8,10\},\ \mu_{3/4} = \{0,2,4,6,8,10\},\ \mu_{1/2} = \mathbb{Z}_{12},\ \mu_{1/3} = \mathbb{Z}_{12},$$
$$\alpha_{3/4} = \{0,4,8\}, \alpha_{5/12} = \{0,2,4,6,8,10\},\ \alpha_{1/3} = \mathbb{Z}_{12},$$
$$\beta_{1/2} = \{0,4,8\},\ \beta_{1/4} = \{0,2,4,6,8,10\},\ \beta_0 = \mathbb{Z}_{12}.$$

Definisi 4: Misalkan μ adalah subgrup fuzzy dari G. Kita definisikan support μ, $supp\,\mu$ sebagai $\{x \in G | \mu(x) > 0\}$.

Contoh:
Perhatikan subgrup fuzzy μ, α dan β seperti pada Contoh 1.
Maka $supp\ \mu = \mathbb{Z}_{12}, supp\ \alpha = \mathbb{Z}_{12}$ dan $supp\ \beta = \{0,2,4,6,8,10\}$.

Definisi 5: Misalkan P adalah himpunan tak kosong. Relasi biner $\leq$ pada P disebut *terurut parsial* jika relasi itu bersifat *refleksif*, *antisimetrik* dan *transitif*. Pasangan $\langle P, \leq \rangle$ kita sebut dengan *himpunan terurut parsial* atau *poset*. Suatu poset $\langle P, \leq \rangle$ disebut *terurut total* jika untuk setiap $x, y \in P$ dapat dibandingkan, artinya $x \leq y$ atau $y \leq x$. Himpunan bagian takkosong S dari P disebut *rantai* di P jika S terurut total dengan relasi $\leq$ tersebut (Roman S, 2008:2-5).

Definisi 6: Misalkan $\langle P, \leq \rangle$ adalah poset dan misalkan $S \subseteq P$.
Suatu *batas atas* dari S adalah $x \in P$ sehingga $s \leq x, \forall s \in S$. Batas atas terkecil dari S disebut dengan *supremum S*; Suatu *bataw bawah* dari S adalah $x \in P$ sehingga $x \leq s, \forall s \in S$. Batas bawah terbesar dari S disebut *infimum* S.

Suatu poset $\langle P, \leq \rangle$ disebut *lattis* jika untuk setiap x, y anggota P mempunyai *supremum* and *infimum* (Roman, 2008:3 & 53).
Catatan bahwa himpunan dari semua subgrup G dengan operasi "*subgrup*" membentuk lattis. Lattis ini kita sebut lattis subgrup dari G.

Relasi Ekuivalensi

Pada bagian ini akan diuraikan beberapa hasil yang terkait dengan subgrup fuzzy dan perbandingan antara definisi Dixit et al. dan definisi Murali & Makamba.

Teorema 1:
Misalkan μ adalah subgrup fuzzy dari $\mathbb{G}$ dan e menotasikan unsur identitas G maka,

$$\mu(x^{-1}) = \mu(x), \forall x \in G$$

$$\mu(e) \geq \mu(x), \forall x \in G.$$

Bukti:
Misalkan $x \in G$.

Misalkan $x^{-1} = y$. Kerana μ merupakan subgrup fuzzy dari G, maka $\mu(y^{-1}) \geq \mu(y)$. Oleh karena $y^{-1} = x$, maka diperoleh $\mu(x) \geq \mu(x^{-1})$. Sedangkan berdasarkan syarat (2) dari Definisi 2, $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$. Kita peroleh kesimpulan $\mu(x^{-1}) = \mu(x)$.

Berdasarkan syarat (2) dari Dafinisi 2, maka

$$\mu(e) = \mu(xx^{-1}) \geq \min\{\mu(x), \mu(x^{-1})\}, \forall x \in G.$$

Berdasarkan bagian 1 teorem ini, $\mu(x^{-1}) = \mu(x)$, maka diperoleh $\mu(e) \geq \mu(x), \forall x \in G$.

Jika μ adalah subgrup fuzzy dari G, maka berdasarkan Teorem 1 bagian 1, μ pasti berbentuk,

$$\mu(x) = \begin{cases} \theta_1, & x \in [\{e\} \cup A] = B_1, \exists A \subset G \\ \theta_2, & x \in B_2 \\ \theta_3, & x \in B_3 \\ & \vdots \\ \theta_p, & x \in B_p \end{cases} \tag{1}$$

dengan $\bigcup_{i=1}^{p} B_i = G, \theta_i \in [0,1]$ dan $B_i \cap B_j = \emptyset$ jika $i \neq j$.

Selanjutnya, untuk subgrup fuzzy μ yang dinyatakan seperti bentuk (1) kita asumsikan $\theta_i > \theta_j$ jika $i < j$.

Teorema 2: Misalkan μ adalah subgrup fuzzy dari G dan $0 \leq t \leq \mu(e)$, maka μ_t adalah subgrup G.

Bukti:
Karena $\mu(e) \geq t$, maka $e \in \mu_t$. Jadi, $\mu_t \neq \emptyset$.
Misalkan $x, y \in \mu_t$, maka $\mu_t(x) \geq t$ dan $\mu_t(y) \geq t$. Karena μ merupakan subgrup fuzzy, maka $\mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} \geq t$. Dengan demikian $xy \in \mu_t$.

Disamping itu, berdasarkan Teorema 1 bagian 1, $\mu(x^{-1}) = \mu(x) \geq t$. Itu artinya $x^{-1} \in \mu_t$. Kita peroleh kesimpulan μ_t adalah subgrup G.

Teorem 3: Subhimpunan fuzzy μ dari G adalah subgrup fuzzy jika dan hanya jika ada rantai dari lattis subgrup G, $P_1(\mu) \subseteq P_2(\mu) \subseteq P_3(\mu) \subseteq \ . \ . \ . \subseteq P_m(\mu) = G$ sehingga μ mempunyai bentuk

$$\mu(x) = \begin{cases} \theta_1, & x \in P_1(\mu) \\ \theta_2, & x \in P_2(\mu)/P_1(\mu) \\ \theta_3, & x \in P_3(\mu)/P_2(\mu) \\ & \vdots \\ \theta_m, & x \in P_m(\mu)/P_{m-1}(\mu) \end{cases} . \tag{1}$$

Bukti:

Misalkan $\mu(x) = \begin{cases} \theta_1, & x \in B_1 \\ \theta_2, & x \in B_2 \\ \theta_3, & x \in B_3 \\ & \vdots \\ \theta_p, & x \in B_p \end{cases}$, dengan $\bigcup_{i=1}^{p} B_i = G$ dan $B_i \cap B_j = \emptyset$ jika $i \neq j$.

Misalkan pula $B_0 = \emptyset$, $P_m = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$ untuk $1 \leq m \leq p$. Maka kita peroleh:

$B_i = \{x \in G | \mu(x) = \theta_i\}$,$P_j = \{x \in G | \mu(x) \geq \theta_j\}$, $B_{i+1} = P_{i+1} \backslash P_i$ dan $P_p = \bigcup_{i=1}^{p} B_i = G$.
($\Longrightarrow$) Misalkan μ adalah subgrup fuzzy dari G dan misalkan m adalah sebarang elemen {1,2,3, . . . , p}. Karena $e \in P_1$, maka $e \in P_m$.

Jika $x, y \in P_m$, maka $\mu(x) \geq \theta_m$ dan $\mu(y) \geq \theta_m$. Karena μ merupakan subgrup fuzzy, maka kita peroleh $\mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$. Sehingga diperoleh, $\mu(xy) \geq \theta_m$.
Oleh karena itu, $xy \in P_m$.

Selanjutnya, berdasarkan Teorem 1 bagian 1, maka $\mu(x^{-1}) = \mu(x) \geq \theta_m$. Sehingga $x^{-1} \in P_m$. Kita peroleh kesimpulan bahwa P_m subgrup fuzzy dari G. Kita tahu bahawa $P_i \subset P_{i+1}, \forall i = 1,2, \ldots, p-1$. Maka diperoleh rantai dari subgrup G, $P_1 \subseteq P_2 \subseteq P_3 \subseteq \ . \ . \ . \subseteq P_p = G$ dan μ dapat ditulis dalam bentuk (1).

($\Longleftarrow$) Misalkan ada rantai dari subgrup G, $P_1(\mu) \subseteq P_2(\mu) \subseteq P_3(\mu) \subseteq \ . \ . \ . \subseteq P_m(\mu) = G$, sehingga μ berbentuk seperti (1).

Misalkan pula $x, y \in G$ dan $\mu(x) = \theta_k$, $\mu(y) = \theta_m$ untuk suatu bilangan Asli k dan m dengan $k < m$. Ini berarti $x \in P_k$, $y \in P_m$. Karena $k < m$, maka $x, y \in P_m$. Demikian juga $xy \in P_m$, kerana P_m merupakan subgrup. Oleh karena itu, $\mu(xy) \geq \theta_m = \mu(y)$. Disamping itu $\theta_m < \theta_k = \mu(x)$.
Jadi, $\mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$.

Akhirnya, jika $x \in G$ dan $x \in B_i$ untuk suatu $i \in \{1,2,3, . . . , p\}$, maka $\mu(x) = \theta_i$. Oleh karenanya, $x \in P_i$. Karena P_i subgrup, maka $x^{-1} \in P_i$. Jadi, $\mu(x^{-1}) \geq \theta_i = \mu(x)$. Kita simpulkan bahwa μ merupakan subgrup fuzzy dari G.

Definisi 7: *Definisi Dixit et al.* Dua subgrup fuzzy μ dan γ dari grup G adalah *ekuivalen* jika keluarga dari level subgrupnya adalah sama (Dixit et al. , 1996:122).
Untuk selanjutnya jika μ dan γ ekuivalen berdasarkan definisi Dixit et al., maka akan dinotasikan dengan $\mu \sim_{\boldsymbol{D}} \gamma$ dan jika tidak ekuivalen akan dinotasikan dengan dengan $\mu \nsim_{\boldsymbol{D}} \gamma$.

Contoh:
Misalkan fungsi μ, α dan β seperti pada Contoh 1. Maka kita peroleh,

$$\mathcal{F}(\mu_U) = \{\{0,2,4,6,8,10\}, \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}\},$$

$$\mathcal{F}(\alpha_U) = \{\{0,4,8\}, \{0,2,4,6,8,10\}, \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}\},$$

$$\mathcal{F}(\beta_U) = \{\{0,4,8\}, \{0,2,4,6,8,10\}, \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}\}.$$

Dengan demikian, berdasarkan Definisi Dixit et al. (Definisi 7), maka $\alpha \sim_{\boldsymbol{D}} \beta$, $\mu \nsim_{\boldsymbol{D}} \alpha$, dan $\mu \nsim_{\boldsymbol{D}} \beta$.

Teorem 4: Misalkan μ dan γ adalah subgrup fuzzy dari G. Jika $\mu \sim_{\boldsymbol{D}} \gamma$, maka $|Im(\mu)| = |Im(\gamma)|$.

Bukti:
Misalkan μ dan γ masing-masing berbentuk

$$\mu(x) = \begin{cases} \theta_1, x \in A_1 \\ \theta_2, x \in A_2 \\ \theta_3, x \in A_3 \\ \vdots \\ \theta_n, x \in A_n \end{cases} \quad , \gamma(x) = \begin{cases} \varepsilon_1, x \in B_1 \\ \varepsilon_2, x \in B_2 \\ \varepsilon_3, x \in B_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_m, x \in B_m \end{cases} \quad ,$$

dengan $\theta_i > \theta_j,\ \varepsilon_i > \varepsilon_j$ untuk $i > j$.

Untuk $1 \leq i \leq n$, misalkan $K_i = \bigcup_{j=1}^{i} A_j$ dan untuk $1 \leq j \leq m$ misalkan $L_j = \bigcup_{t=1}^{j} B_t$. Kita peroleh, $\mathcal{F}(\alpha_U) = \{K_1, K_2, K_3, \dots, K_n\}$ dan $\mathcal{F}(\beta_U) = \{L_1, L_2, L_3, \dots, L_m\}$. Jika $\mu \sim_{\boldsymbol{D}} \gamma$, maka $\mathcal{F}(\mu_U) = \mathcal{F}(\gamma_U)$.

Sehingga diperoleh $m = n$. Itu artinya bahwa $|im(\mu)| = |im(\gamma)|$.

Definisi 8: *Definisi Murali & Makamba.* Dua subgrup fuzzy μ dan γ dari G adalah ekuivalen, jika: untuk semua $x, y \in G,\ \ \mu(x) > \mu(y)$ jika dan hanya jika $\gamma(x) > \gamma(y)$; $\mu(x) = 0$ jika dan hanya jika $\gamma(x) = 0$ (Murali & Makamba, 2001:259).

Catatan:
Syarat kedua sama artinya dengan $supp\,\mu = supp\,\gamma$. Untuk selanjutnya jika μ dan γ ekuivalen berdasarkan definisi Murali & Makamba, maka akan dinotasikan dengan $\mu \sim_{\boldsymbol{M}} \gamma$ dan jika tidak ekuivalen akan dinotasikan dengan dengan $\mu \nsim_{\boldsymbol{M}} \gamma$.

Contoh:
(Murali & Makamba, 2001:260). Misalkan S adalah grup yang dinyatakan dengan presentasi $\mathbb{S} = \langle a, b | a^3, b^2, ab = ba \rangle$. Kita peroleh $\mathbb{S} = \{e, a, a^2, b, ab, a^2 b\}$. Definisikan μ dan γ sebagai berikut.

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1,\ x = e \\ \frac{1}{2},\ x = a, a^2 \\ \frac{1}{3},\ x \text{ yang lain} \end{cases} \quad , \ \gamma(x) = \begin{cases} 1,\ x = e \\ \frac{1}{2},\ x = a, a^2 \\ 0,\ x \text{ yang lain} \end{cases} \quad .$$

Jelas bahawa $\sigma(x) > \sigma(y)$ jika dan hanya jika $\gamma(x) > \gamma(y)$, tetapi $supp\,\sigma = S \neq \{e, a, a^2\} = supp\,\gamma$. Berdasarka Definisi 8, maka $\sigma \nsim_{\boldsymbol{M}} \gamma$.

Contoh:
Misalkan α dan β adalah subgrup fuzzy seperti pada Contoh 1 dan

$$\rho(x) = \begin{cases} 1,\ x \in \{0,4,8\} \\ \frac{1}{3},\ x \in \{2,6,10\} \\ 0,\ x \in \{1,3,5,7,9,11\} \end{cases} \quad .$$

Fungsi ρ adalah subgrup fuzzy dari $\mathbb{Z}_{12}$.

Kita peroleh, $supp\,\alpha = \mathbb{Z}_{12},\ supp\,\beta = \{0,2,4,6,8,10\}$ dan $supp\,\rho = \{0,2,4,6,8,10\}$.
Jelas bahwa $\alpha(x) > \alpha(y)$ jika dan hanya jika $\beta(x) > \beta(y)$, tetapi $supp\,\alpha \neq supp\,\beta$. Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 8, maka $\alpha \nsim_{\boldsymbol{M}} \beta$. Karena $supp\,\beta = supp\,\rho$ dan $\beta(x) > \beta(y)$ jika dan hanya jika $\rho(x) > \rho(y)$, maka $\beta \sim_{\boldsymbol{M}} \rho$.

Contoh:
Berdasarkan definisi Dixit et al., maka semua subgrup fuzzy dari grup trivial $G = \{e\}$ adalah ekuivalen, yaitu berbentuk $\mu(e) = \varepsilon$ dengan $\varepsilon \in [0,1]$ sedangkan berdasarkan definisi Murali & Makamba ada dua buah subgrup fuzzy dari grup $G = \{e\}$, yaitu

$\mu_1(e) = \varepsilon$ untuk sebarang $\varepsilon \in ([0,1]$ dan $\mu_2(e) = 0$.

Teorem 5: Misalkan μ dan γ adalah subgrup fuzzy dari G. Jika $\mu \sim_{\boldsymbol{M}} \gamma$, maka $|Im(\mu)| = |Im(\gamma)|$.

Bukti:
Definisikan relasi $f: Im(\mu) \rightarrow Im(\gamma)$ dengan $f\big(\mu(x)\big) = \gamma(x), \forall x \in G$.
Misalkan $s, t \in Im(\mu)$ dan misalkan $s = \mu(y), t = \mu(z)$.

Jika $s = t$, maka $\mu(y) = \mu(z)$. Akibatnya $f(s) = f\big(\mu(y)\big) = f\big(\mu(z)\big) = f(t)$. Ini artinya bahwa f terdefinisi dengan jelas ("*well-defined*").

Misalkan $f(s) = f(t)$. Sedangkan $f(s) = f(\mu(y))$ dan $f(t) = f(\mu(z)$, maka dengan menggunakan sifat (1) Definisi 8, kita peroleh $\mu(y) = \mu(z)$. Akibatnya, $s = t$. Ini artinya bahwa f bersifat *satu-satu ("one to one").*

Misalkan $v \in Im(\gamma)$. Maka ada $w \in G$ sehingga $\gamma(w) = v$. Berdasarkan pendefinisian f, kita peroleh $\gamma(w) = f(\mu(w))$. Jadi, ada $\mu(w) \in Im(\mu)$ sehingga $f(\mu(w)) = \gamma(w) = v$. Ini artinya bahwa f bersifat *pada ("onto").*

Berdasarkan 1), 2) dan 3), maka f adalah fungsi bijektif. Ini mempunyai arti bahwa ada korespondensi satu-satu antara $Im(\mu)$ dan $Im(\gamma)$. Jika keduanya finit (hingga), maka $|Im(\mu)| = |Im(\gamma)|$.

Konvers dari Teorema 5 tidak benar. Sebagai contoh adalah α dan β seperti pada Contoh 1. Kita tahu bahwa $|Im(\alpha)| = |Im(\beta)|$, tetapi $\alpha \nsim_{\boldsymbol{M}} \beta$.

PENUTUP

Definisi Dixit et al. (Definisi 7) tidak ekuivalen dengan Definisi Murali & Makamba (Definisi 8). Sebagai contoh ialah, subgrup fuzzy α dan β seperti pada Contoh 1 adalah ekuivalen berdasarkan definisi Dixit et al., seperti yang telah dijelaskan pada Contoh 4, tetapi tidak ekuivalen berdasarkan definisi Murali & Makamba, seperti yang telah dijelaskan pada Contoh 5. Oleh karena itu, Definisi Dixit et al. tidak ekuivalen dengan definisi Murali & Makamba. Dengan adanya relasi ekuivalensi pada subgrup fuzzy, maka banyak subgrup fuzzy dari suatu grup hingga adalah hingga. Oleh karena itu, hal menarik yang dapat kita kaji selanjutnya adalah mengembangkan formula atau algoritma penghitungan banyak subgrup fuzzy dari suatu grup hingga. Hal lain yang menarik untuk dikaji adalah membangun grup kelas ekuivalensi berdasarkan definisi ekuivalensi pada sub grup fuzzy sebagaimana yang telah diuraikan di atas.

DAFTAR PUSTAKA

Dixit, V.N., Kumar, P. & Bhambri, S.K. (1996). Union of fuzzy subgroup. *Fuzzy Set and System.* 78: 121-123

Laszlo, F. (1992). Structure and construction of fuzzy subgroup of a group. *Fuzzy Set and System.* 51: 105-109

Murali, V. & Makamba, B.B. (2001). On an equivalence of fuzzy subgroups I. *Fuzzy Sets and Systems.* 123: 259–264

Murali, V. & Makamba, B.B. (2004). Counting the number of fuzzy subgroups of an abelian group of order $p^n q^m$. *Fuzzy Sets And System.* 144: 459-470

Roman, S. (2008). *Lattice and Ordered Set.* New York: Springer.

Sulaiman, R. & Abdul Ghafur, A. (2010). Counting Fuzzy Subgroups of Symmetric Groups S_2, S_3 and Alternating Group A_4. *Journal of Quality Measurement and Analysis.* July, 2010; 6(1): 57-63

Tarnauceanu, M. & Bentea, L. (2008). On the number of fuzzy subgroups of finite abelian groups. *Fuzzy Sets and Systems.* 159: 1084-1096

Zhang,Y. (2001). Some properties on fuzzy subgroup. *Fuzzy Sets and Systems.* 119: 427-438

Zhang, Y. dan Zou, K. (1998). A note on an equivalence relation on fuzzy subgroups. *Fuzzy Sets and Systems.* 95: 243-247